



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVIII-a

ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

**Clasa a XII-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii**

## 1. Aufgabe (20 Punkte)

Gegeben ist die Menge  $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = I_2\}$  ( $A^t$  ist die transponierte Matrix von  $A$ ).

- Zeigt, dass  $(G, \cdot)$  eine Gruppe ist.
- Gibt es Matrizen  $A, B \in G$ , sodass  $A + B \in G$ ?
- Sei  $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid {}^t A \cdot A = I_2\}$ . Bestimmt die Anzahl der Elemente der Menge  $H$  und zeigt, dass  $(H, \cdot)$  eine Gruppe ist.

## 2. Aufgabe (20 Punkte)

Gegeben ist die Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \left[\frac{e}{2}, e^2\right]$ ,  $f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{2}{x+1}}$ .

- Wenn  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine ableitbare Funktion mit stetiger Ableitung ist, beweist, dass:  
$$\int_0^1 (1 + xg'(x)) \cdot e^{g(x)} dx = e^{g(1)}.$$
- Berechnet  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- Zeigt, dass die Funktion  $f$  umkehrbar ist und berechnet  $\int_{\frac{e}{2}}^{e^2} f^{-1}(x) dx$ .

## 3. Aufgabe (20 Punkte)

Gegeben ist die Gruppe  $(G, *)$ , wo  $G = (2, \infty)$  und  $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ , für alle  $x, y \in G$ .

- Wenn  $a, b, c \in G$  și  $a * b = c, b * c = a, c * a = b$ , zeigt, dass că  $a = b = c$ .
- Bestimmt die Folge  $(a_n)_{n \geq 1} \subset G$ , wenn  $a_1 * a_2 * \dots * a_n = n + 3$  für alle  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Sei  $H$  eine Untergruppe der Gruppe  $G$  die alle natürlichen Zahlen  $k \geq 3$  enthält. Beweist, dass  $H$  alle rationalen Zahlen  $q > 2$  enthält.

## 4. Aufgabe (20 Punkte)

Ein Löwe rennt seiner Beute hinterher. Er startet an einem Punkt  $O$  mit der Beschleunigung

$a(t) = \left(\frac{4t^2+2}{e^{15}} + \frac{2t}{e^4}\right) e^{t^2} + 3t^2 - 12t + 9$ , in  $\frac{m}{s^2}$  ausgedrückt und der Zeit  $t \geq 0$  in Sekunden ausgedrückt.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  beträgt die Geschwindigkeit  $v(0) = \left(1 + \frac{1}{e^4}\right) m/s$ .

- Zeigt, dass  $v(t) = \left(\frac{2t}{e^{15}} + \frac{1}{e^4}\right) e^{t^2} + t^3 - 6t^2 + 9t + 1, t \geq 0$ .
- Stellt fest, ob es Zeiten gibt, in denen der Löwe ruht.
- Zeigt, dass die vom Löwen zurückgelegte Strecke vom Zeitpunkt  $t = 1$  bis  $t = 4$  größer als 11 m ist.

Hinweis: Falls  $S(t)$  der vom Löwen in  $t$  Sekunden zurückgelegte Weg ist und  $S$  eine zwei Mal ableitbare Funktion ist, deren zweite Ableitung stetig ist, dann ist die Geschwindigkeit des Löwen  $v(t) = S'(t)$ , und seine Beschleunigung  $a(t) = S''(t)$ .

### Notă:

Timpe de lucru 3 ore; toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.

Etapa județeană CMA\_H2\_7 martie 2026